Nom : | DEVOIR DE MATHÉMATIQUES | T STI2D

Prénom : | Corrigé

durée : 1 heure | Sur 20

Les calculatrices sont autorisées ***en mode examen***.

Exercice 1 (10 points) :

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \frac{2-6i}{2-i}$

Déterminer la forme algébrique de z_1.

2 pts

$$z_1=\frac{(2-6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{(4+2i-12i-6i^2)}{(4+1)}=\frac{10-10i}{5}=2-2i$$

2. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = -2 - 2i$.

a. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

2 pts

$a = b < 0$, donc arg $(z_2) = -\frac{3\pi}{4}$

donc $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

b. Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

$$z_2^4=(2\sqrt{2})^4\times e^{-i\frac{3\pi}{4}\times 4}=64e^{-3i\pi}=64e^{-i\pi}=-64\ .$$

2 pts

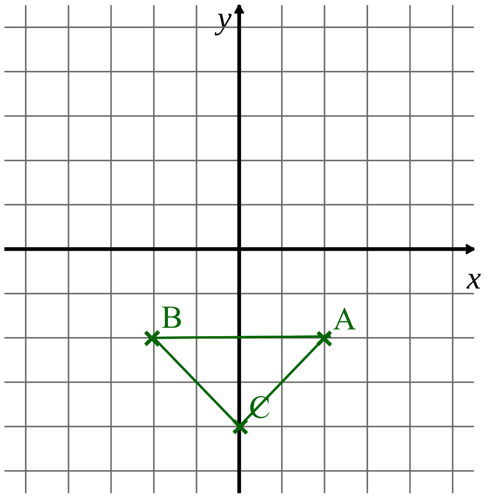
C'est donc bien un nombre réel

3. On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$z_A = 2 - 2i$, $z_B = -2 - 2i$ et $z_C = -4i$.

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe ci-contre, dans lequel un carreau est une unité.

1 pt



b. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

AB = $|z_B - z_A|$ = $|(-2 - 2i) - (2 - 2i)|$ = $|-2 - 2i - 2 + 2i|$ = $|-4|$ = 4.

AC = $|z_C - z_A|$ = $|(-4i) - (2 - 2i)|$ = $|-4i - 2 + 2i|$ = $|-2 - 2i|$ = $\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

BC = $|z_C - z_B|$ = $|(-4i) - (-2 - 2i)|$ = $|-4i + 2 + 2i|$ = $|2 - 2i|$ = $\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

3 pts

AC = BC donc le triangle est isocèle.

$AC^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16$ et $AB^2 = 4^2 = 16$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice 2 (6 points) :

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x + 4$.

a. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \ln(x)$.

$g(x) = x\ \ln(x) - x + 4$. $g = uv - x - 4$, avec

$u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. 2 pts

donc $g'(x) = u'v + uv' - 1 = 1\times\ln(x) + x\times(1/x) - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$;

b. En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Sur $]0\,;1[$: $\ln(x) < 0$ donc $g'(x) < 0 \rightarrow g$ est strictement décroissante.
En $x = 1$: $g'(1) = \ln(1) = 0$. Minimum : $g(1) = 1\times\ln(1) - 1 + 4 = 3$.
Sur $]1\,;+\infty[$: $\ln(x) > 0$ donc $g'(x) > 0 \rightarrow g$ est strictement croissante. 2 pts

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^{-x}$.

a. Calculer la limite de h en $-\infty$.

$h(x) = x^2e^{-x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \\ \text{et } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty. \end{array}\right\} \text{Donc } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Par produit

1 pt

b. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0. \end{array}\right\} \text{Donc } \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$$

Par croissances comparées

1 pt

Exercice 3 (4 points) :

On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 7$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

$y' + 5y = 7$ revient à $y' = -5y + 7$ qui est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -5$ et $b = 7$.

Les solution sont donc de la forme $f(t) = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a}$ donc $f(t) = k\,e^{-5t} + \dfrac{7}{5}$; $k \in \mathbb{R}$. 2 pts

2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 4$.

$f(0) = 4$ revient à $k\,e^{-5\times0} + \dfrac{7}{5} = 4 \Leftrightarrow k + \dfrac{7}{5} = 4$, donc $k = 4 - \dfrac{7}{5} = \dfrac{20}{5} - \dfrac{7}{5} = \dfrac{13}{5}$. 2 pts

La fonction cherchée est donc $f(t) = \dfrac{13}{5}e^{-5t} + \dfrac{7}{5}$