SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Rappels :

1°) Suites arithmétiques :

Définition :

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant r au terme précédent. Le nombre r est appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=u_n+r \end{cases}$.

Exemple :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0=-7 \\ u_{n+1}=u_n+4 \end{cases}$. On a alors $u_1=-3$; $u_2=1$; $u_3=5$; $u_4=9$ (…)

2°) Suites géométriques :

Définition :

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre constant q le terme précédent. Le nombre q est appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=q\,u_n \end{cases}$.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2\,u_n \end{cases}$. On a alors $u_0=1$; $u_1=2$; $u_2=4$; $u_3=8$; $u_4=16$;

(u_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

II. Moyenne arithmétique, moyenne géométrique :

1°) Définitions :

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels.

• La moyenne arithmétique de a et b est donnée par $\frac{a+b}{2}$.

• La moyenne géométrique de a et b, s'ils sont positifs, est donnée par $\sqrt{a\times b}$.

2°) Lien avec les suites :

Remarque :

Lorsqu'on prend trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, celui du milieu est la moyenne arithmétique des deux autres.

Exemple :

Dans l'exemple du ***I.***, $u_2=1$; $u_3=5$; $u_4=9$. $\frac{u_2+u_4}{2}=\frac{1+9}{2}=5=u_3$.

Remarque :

Lorsqu'on prend trois termes consécutifs d'une suite géométrique, celui du milieu est la moyenne géométrique des deux autres.

Exemple :

Dans l'exemple du ***I.***, $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 8$. $\sqrt{u_1 \times u_3} = \sqrt{2 \times 8} = 4 = u_2$.

III. Expression en fonction de n (relation fonctionnelle) :

1°) Vocabulaire :

Vocabulaire :

Lorsqu'on exprime le terme d'une suite en fonction de n, comme dans $u_n = 2n + 3$ par exemple, on parle de relation fonctionnelle, ou du terme général de la suite, ou encore de sa formule explicite.

2°) Pour une suite arithmétique :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^er^ terme u_0 et de raison r. Alors pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Exemple :

Soit la suite arithmétique définie au ***I.*** par $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$. Son premier terme est -7 et sa raison est 4.

On a alors $u_n = u_0 + nr = -7 + n \times 4$, que l'on peut écrire $u_n = -7 + 4n$ ou encore $u_n = 4n - 7$.

3°) Pour une suite géométrique :

Propriété :

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple :

Soit la suite géométrique (u_n) définie au ***I.*** par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n \end{cases}$. Son premier terme est 1 et sa raison est 2.

On a alors $u_n = u_0 \times q^n$, c'est-à-dire $u_n = 1 \times 2^n = 2^n$.

IV. Somme des premiers termes d'une suite :

1°) Somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique :

Propriété :

La somme S_n des « n premiers entiers » est donnée par la formule :

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque :

$\sum_{i=1}^{n} i$ se lit « somme, pour i allant de 1 à n, des i ».

Autrement dit, c'est comme si on faisait $i + i + i + \ldots + i + i + i$, avec i changeant de valeur à chaque fois.

Démonstration :

On sait que : $S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$

Mais on peut aussi écrire : $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

En additionnant on obtient : $2S_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$

Donc $2S_n = n(n+1)$

D'où :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(CQFD)}$$

Exemple :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$$

Propriété :

La somme S des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite arithmétique est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

ou

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Il s'agit bien d'une suite arithmétique, de premier terme 5 et de raison –2. La somme S des 500 premiers termes vaut :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{499} = \sum_{i=0}^{499} u_i = \frac{(u_0 + u_{499}) \times 500}{2}.$$

$u_{499} = u_0 + 499 \times (-2) = -993$, donc $S = \dfrac{(5 - 993) \times 500}{2} = -247000$.

Utilisation de la calculatrice :

Pour les TI : Il suffit d'aller dans le menu **math** et de choisir **0:somme Σ**.

et pour les casio, un tuto (scanner ou cliquer sur le QR code) :

2°) Somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique:

Théorème :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 = 1$, c'est à dire $u_n = q^n$ alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + q + \ldots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad S_n = \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Corollaire :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Exemple :

Soit la suite définie par $u_n = 2\times1{,}5^n$. Il s'agit bien d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}5$.

La somme S des 11 premiers termes de la suite est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = \sum_{i=0}^{10} u_i = \sum_{i=0}^{10} 2\times1{,}5^i = u_0\times\frac{1-q^{11}}{1-q} = 2\times\frac{1-1{,}5^{11}}{1-1{,}5}\approx341{,}99.$$

V. Algorithmes :

1°) Calculer et afficher les termes d'une suite :

Exemple :

Calculer et afficher les 5 termes suivant u_0 de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 0{,}8$:

Algo A : on utilise la formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$:

En langage naturel :

```
u ← –2
Pour k allant de 0 à 4
        u ← u + 0,8
        afficher u
FinPour
```

en Python :

```
def algoA():
   u=-2
   for k in range(5):
      u=u+0.8
      print(u)
```

Remarque :

Sous Python la liste des entiers de 0 à n est range(n+1), la liste des entiers de 1 à n est range(1,n+1).

Algo B : on utilise la formule en fonction de n : $u_n = -2 + 0{,}8n$:

En langage naturel :

```
Pour k allant de 1 à 5
        afficher -2+0,8*n
FinPour
```

en Python :

```
def algoA():
   for k in range(1,6):
       print(-2+0,8*n)
```

Exemple :

Avec une liste : Calculer et afficher la liste des 7 premiers termes (y compris u_0) de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1{,}3$:

Algo C : on utilise la formule de récurrence $u_{n+1} = 1{,}2u_n$.

En langage naturel :

```
L ← liste vide
u ← 3
Pour k allant de 0 à 6
     Ajouter l'élément u à L
     u ← 1,3 u
FinPour
Afficher L
```

en Python :

```
def algoC():
   L=[]
   u=3
   for k in range(7):
      L.append(u)
      u=1.3*u
   return L
```

Algo D : on utilise la formule en fonction de n : $u_n = 3\times1{,}3^n$.

En langage naturel :

```
L ← liste vide
Pour k allant de 0 à 6
    Ajouter l'élément 3×1,3^k à L
FinPour
Afficher L
```

en Python :

```
def algoD():
    L=[]
    for k in range(7):
        L.append(3*1.3**k)
    return L
```

ou :

Algo Dbis :

En langage naturel :

```
L ← liste dont les éléments sont 3×1,3^k pour k allant de 0 à 6
Afficher L
```

en Python :

```
def algoDBis():
    L=[3*1.3**k for k in range(7)]
    return L
```

2°) Calculer et afficher la somme des termes d'une suite :

Principe :

Pour calculer une somme à l'aide d'un algorithme, on va utiliser une variable dite « accumulateur » :

Exemple :

Calculons la somme des 7 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1{,}3$:

Algo E : on utilise la formule de récurrence $u_{n+1} = 1{,}3u_n$. L'accumulateur est S ici.

En langage naturel :

```
S ← 0
u ← 3
Pour k allant de 0 à 6
    S ← S + u
    u ← 1,3 ×u
FinPour
Afficher S
```

en Python :

```
def algoE():
    S=0
    u=3
    for k in range(7):
        S=S+u
        u=1.3*u
    return S
```

Algo Ebis : on utilise la formule en fonction de n : $u_n = 3\times1{,}3^n$.

En langage naturel :

```
S ← 0
Pour k allant de 0 à 6
    S ← S + 3×1,3^k
FinPour
Afficher S
```

en Python :

```
def algoEbis():
    S=0
    for k in range(7):
        S=S+3*1.3**k
    return S
```