FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE A

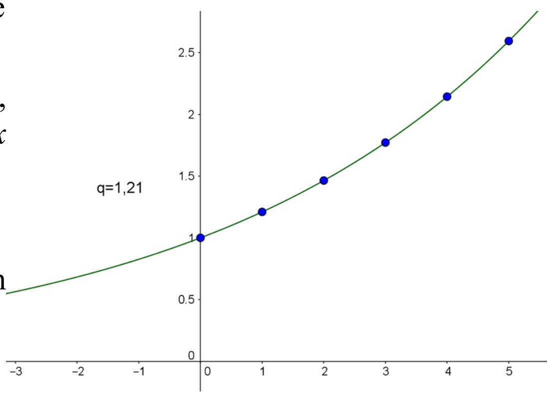
I. Fonctions $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$:

1°) Définition :

Définition :

a désigne un nombre réel strictement positif. On considère le nuage de points représentatif de la suite géométrique (a^n).

La fonction exponentielle de base *a* est définie par $f(x) = a^x$, où *x* est réel, elle prend les mêmes valeurs que la suite lorsque *x* est entier naturel.



Rappel :

Sur la calculatrice, c'est la touche $\boxed{\wedge}$ qui permet l'opération d'exposant.

Cas particuliers :

$a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$; $1^x = 1$ et $a^x > 0$ car $a > 0$.

2°) Variations, graphique :

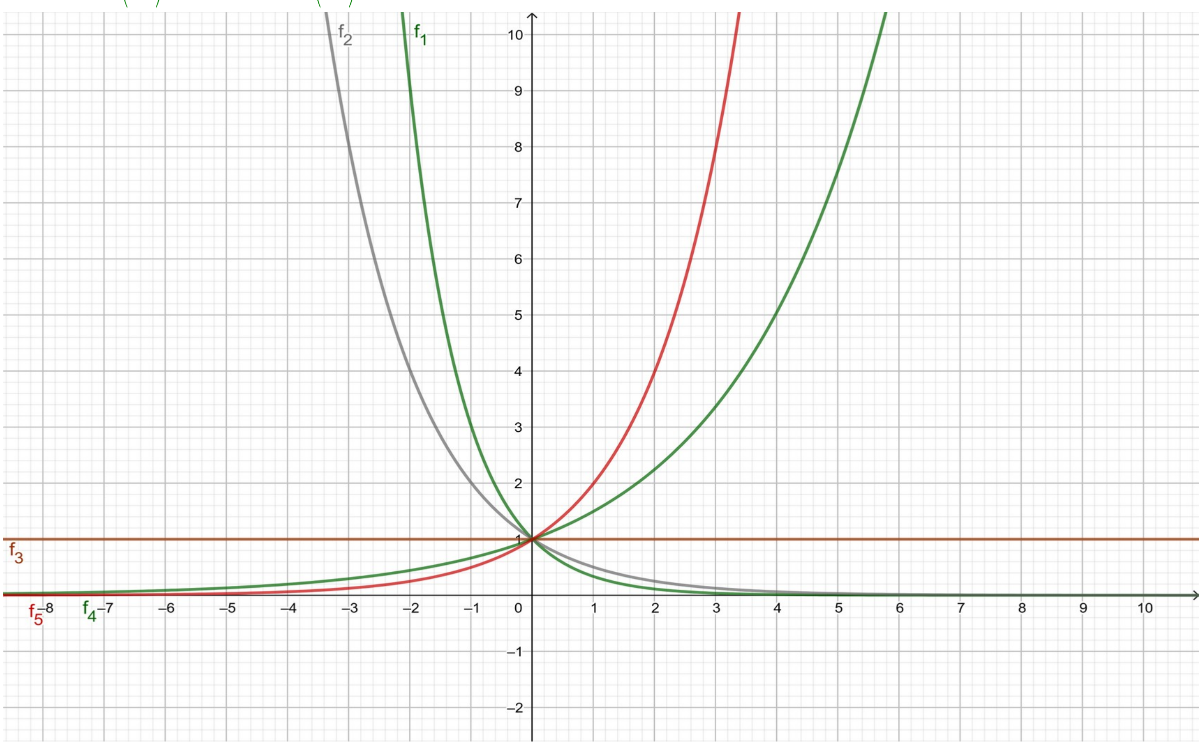
Propriété (admise) :

Soit $a > 0$ et *f* la fonction exponentielle de base *a*.

- Si $0 < a < 1$ alors *f* est décroissante
- Si $a = 1$ alors *f* est constante
- Si $a > 1$ alors *f* est croissante

Exemples :

Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions exponentielles de base $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; 1 ; 1,5 et 2 : $f_1(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $f_3(x) = 1^x$; $f_4(x) = 1{,}5^x$; $f_5(x) = 2^x$.



3°) Opérations :

Propriété :

$a^{x+y}=a^x\times a^y$; $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$; $a^{\frac{x}{2}}=\sqrt{a^x}$;

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$; $(a^x)^y=a^{xy}$; $a^x\times b^x=(ab)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Exemples :

Nous pouvons simplifier les expressions suivantes :

$\dfrac{3^{4x}}{3^4}=3^{4x-4}=3^{4(x-1)}$; $\dfrac{4^x\times 3^x}{2^x}=\left(\dfrac{4\times 3}{2}\right)^x=6^x$ $5\times 5^{8,2}=5^1\times 5^{8,2}=5^{9,2}$.

$(\sqrt{2})^{2,6}\times(\sqrt{2})^{1,4}=(\sqrt{2})^4=4$; $1,3^x\times 1,3^{-x}=1,3^{x-x}=1,3^0=1$; $(0,8^x)^{\frac{1}{x}}=0,8^{x\times\frac{1}{x}}=0,8^1=0,8$.

II. Sens de variation des fonctions du type $f(x)=k\,a^x$:

Propriété (admise) :

Soient a et k deux réels tels que $a>0$ et $k\neq 0$.

- Si $k>0$ alors f et la fonction exponentielle de base a ont le même sens de variation ;
- Si $k<0$ alors f et la fonction exponentielle de base a ont des sens de variations contraires.

Exemple :

Soit $f(x)=-2\times\left(\dfrac{3}{7}\right)^x$ pour x réel.

Comme $0<\dfrac{3}{7}<1$, la fonction exponentielle de base $\dfrac{3}{7}$ ($x\longmapsto\left(\dfrac{3}{7}\right)^x$) est décroissante.

$-2<0$, f et la fonction exponentielle de base $\dfrac{3}{7}$ ont des sens de variation contraires, donc f est croissante.

III. Taux moyen sur n évolutions :

1°) Rappel :

Propriété :

Soit t un taux d'évolution (positif pour une augmentation, négatif pour une diminution), exprimé en valeur décimale.

Appliquer le taux t à une valeur revient à la multiplier par $1+t$. $1+t$ est appelé le coefficient multiplicateur (CM) associé à cette évolution.

Ainsi CM $=1+t$ et $t=$ CM -1.

Exemple :

Augmenter une quantité de 14 % revient à appliquer un taux d'évolution de 0,14 et donc à multiplier par $1+0,14=1,14$.

Diminuer une quantité de 23 % revient à appliquer un taux d'évolution de –0,23 et donc à multiplier par $1-0,23=0,77$.

2°) Taux d'évolution moyen :

Propriété :

Si CM est le coefficient multiplicateur global pour n évolutions successives, alors $\mathrm{CM}^{\frac{1}{n}}$ est le coefficient multiplicateur moyen des n évolutions. Le taux d'évolution moyen est alors de $\mathrm{CM}^{\frac{1}{n}} - 1$.

Remarque :

Pour trouver un taux d'évolution moyen, il faut d'abord trouver le coefficient multiplicateur moyen.

Exemple 1 :

Le salaire de Karim a augmenté de 5 % en 3 ans. On se demande quel est son taux d'évolution annuel moyen.

Une augmentation de 5 % (t = 0,05) correspond à un coefficient multiplicateur (global) de 1,05. Le coefficient multiplicateur moyen (sur 3 ans) est donc de $1{,}05^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}016$, ce qui correspond à un taux d'évolution moyen d'environ 0,016 = 1,6 %.

Exemple 2 :

Soit une diminution de 30 % sur 10 ans.

Le coefficient multiplicateur global est de $\mathrm{CM}_g = 0{,}7$.

Le coefficient multiplicateur moyen est de $\mathrm{CM}_\mathrm{m} = 0{,}7^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}965$.

Le taux d'évolution moyen est donc d'environ 0,965 – 1 = –0,035 = –3,5 %.

Remarque :

$x^{\frac{1}{n}}$ est aussi noté $\sqrt[n]{x}$ (se lit racine n-ième de x). C'est le nombre qui, multiplié n fois avec lui-même, c'est-à-dire mis à la puissance n, donne x.

Exemple :

$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$. En effet, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$.

Remarque :

Augmenter 4 fois de 10 % n'est pas la même chose que d'augmenter de 40 %.

En effet, augmenter de 10 % revient à appliquer le coefficient multiplicateur 1,1 quatre fois de suite, soit un CM global de $1{,}1^4 = 1{,}4641$, ce qui correspond à une augmentation de 46,41 %.

Nous pouvons faire la même remarque pour les diminutions.