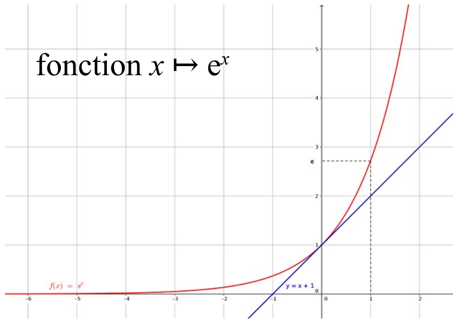
LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

I. Définition et premières propriétés :

1°) Définition :



Soit a un réel. L'équation $e^x = a$ d'inconnue x :

- n'a pas de solution si $a \leqslant 0$;
- a une unique solution si $a > 0$. Dans ce cas, la solution est notée $\ln a$.

Définition :

Si $a > 0$, $\ln a$ est l'unique solution de l'équation $e^x = a$. « ln » se dit « logarithme népérien ».

Remarques :

- On a $e^b = a \Leftrightarrow \ln a = b$.
- Une exponentielle étant toujours positive, on a forcément $a > 0$, et donc si $a \leqslant 0$, $\ln a$ n'existe pas. La fonction logarithme népérien est donc définie sur $]0 ; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

2°) Valeurs particulières :

Propriété :

- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) ;
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ (car $e^{-1} = \frac{1}{e}$)
- $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$) ;
- $\ln(e^x) = x$ (car $e^x = e^x$).

II. Propriétés algébriques :

Dans cette partie, a et b sont deux réels de $]0 ; +\infty[$.

1°) Logarithme d'un produit :

Propriété : (relation fonctionnelle)

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple :

$\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln((\sqrt{5} + 2) \times (\sqrt{5} - 2)) = \ln(5 - 4) = \ln 1 = 0$

2°) Logarithme d'un inverse, d'un quotient :

- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Preuve :

$\ln 1 = 0$ or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$ donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

Exemple :

On veut résoudre $\ln x - \ln 5 = \ln 3 - \ln x$. Cette équation n'est définie que si $x \in]0 ; +\infty[$.

D'après la propriété précédente, $\ln x - \ln 5 = \ln 3 - \ln x \Leftrightarrow \ln x + \ln x = \ln 3 + \ln 5 \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln 15$

$\Leftrightarrow x^2 = 15$ c'est à dire $x = \sqrt{15}$ ou $x = -\sqrt{15}$ et comme $x \in]0 ; +\infty[$, la seule solution est donc $\sqrt{15}$.

3°) Logarithme d'une puissance, d'une racine :

Propriété :

- Pour tout entier relatif n, on a $\ln(a^n) = n \ln a$.
- Pour tout réel x, on a $\ln(a^x) = x \ln a$ (généralisation de la précédente).
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Exemple :

- $\ln e^2 = 2 \ln e = 2$;
- $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$;
- $4 \ln \sqrt{2} = \dfrac{4}{2} \ln 2 = 2 \ln 2$.

III. Étude de la fonction logarithme népérien :

1°) Fonction dérivée :

Propriété :

La fonction $f = \ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Conséquence :

La fonction logarithme népérien est une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exemple 1 :

Déterminons l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe du logarithme népérien au point d'abscisse 1.

$\mathcal{T} : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$f(1) = \ln 1 = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, donc

$\mathcal{T} : y = 1(x - 1) + 0$, donc $y = x - 1$.

Exemple 2 :

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$. Calculons sa dérivée.

f est de la forme $u.v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Donc $f' = u'v + uv'$ soit $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

2°) Tableau de variations :

Propriété :

La dérivée de la fonction ln est $\dfrac{1}{x}$, qui est positive sur $]0 ; +\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	
$f(x) = \ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Conséquence :

Pour a et b dans $]0 ; +\infty[$: $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Exemples :

- $\ln 3 > \ln 0{,}3$ car $3 > 0{,}3$;
- $\ln 5 > 0$ car $\ln 1 = 0$ et $5 > 1$;
- $\ln 0{,}1 < \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$ car $0{,}1 < \dfrac{3}{4}$;
- $\ln\left(\dfrac{7}{8}\right) < 0$ car $\dfrac{7}{8} < 1$.
- Si on veut étudier le signe de $e^{2x+1} - 2$ sur $\mathbb{R}$, on résout $e^{2x+1} - 2 > 0$:

$$\begin{aligned} e^{2x+1} - 2 > 0 &\Leftrightarrow e^{2x+1} > 2 \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{2x+1}) > \ln 2 \text{ (l'ordre est conservé car la fonction ln est croissante)} \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 > \ln 2 \\ &\Leftrightarrow 2x > \ln 2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{\ln 2 - 1}{2} \end{aligned}$$

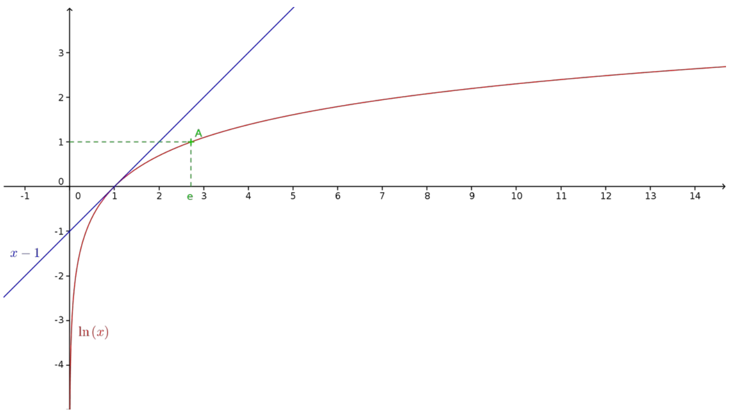
Exemple 2 :

Cherchons la valeur de n à partir de laquelle 2^n est supérieur à 10^6. Pour cela, il faut résoudre l'équation suivante :

$$2^n \geqslant 10^6 \Leftrightarrow \ln 2^n \geqslant \ln 10^6 \Leftrightarrow n \ln 2 \geqslant \ln 10^6 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 10^6}{\ln 2} \approx 19{,}9.$$

C'est donc à partir de $n = 20$ que $2^n \geqslant 10^6$.

3°) Représentation graphique :



$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale en 0) ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Remarque :

Il existe un unique réel, noté e, tel que $\ln e = 1$.

Propriété :

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque :

Cela vient du fait que

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x.$$