ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Généralités sur les équations différentielles :

Définition :

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Elle lie une fonction et sa ou ses dérivée(s). Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

Remarque :

Habituellement en mathématiques, l'inconnue d'une équation différentielle est notée y, sa dérivée première est donc notée y', sa dérivée seconde y'' … D'autres notations existe, en particulier en sciences physiques, on utilise plus $\frac{dy}{dx}$ lorsque la variable est x, ou $\frac{dy}{dt}$ lorsque la variable est t.

Exemple :

L'équation (E) : $y' + 2\,y = 4x + 4$ est une équation différentielle.

Elle peut aussi s'écrire $\frac{dy}{dx} + 2\,y = 4x + 4$ ou $f\,'(x) + 2\,f(x) = 4x + 4$.

La fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x + 1$ est une solution de (E). En effet, $f\,'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2$, donc $f\,'(x) + 2f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2 + 2(\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 1) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2 + 2\mathrm{e}^{-2x} + 4x + 2 = 4x + 4$. On dit alors que f est une solution particulière (une des solutions) de l'équation (E).

La fonction $g(x) = 2x + 1$ est aussi une solution de (E).

En revanche, $h(x) = 5x$ n'est pas solution de (E). En effet, $h\,'(x) + 2h(x) = 5 + 10x \neq 4x + 4$.

Définition :

On appelle ordre d'une équation différentielle le plus haut rang de dérivation présent dans l'équation.

Exemple :

$y' + 2y = 4x + 4$ et $y' = 2x$ sont des équations différentielles du premier ordre car elle font intervenir la dérivée première de la fonction.

$y + y'' = 0$ et $y - 5y' + 3y'' = 2x$ sont des équations différentielles d'ordre 2 car elle font intervenir la dérivée seconde, et éventuellement sa dérivée première.

II. Équations différentielles du type $y' = ay + b$:

1°) Équations différentielles du type $y' = ay$ (cas $b = 0$, équation homogène) :

a) Solution générale :

Théorème :

Soit $y' = ay$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction solution.

Vocabulaire :

De telles équations différentielles, dans lesquelles les termes qui apparaissent contiennent tous la fonction ou sa dérivée (il n'y a plus le b où la fonction n'apparaît pas) sont appelées **équations homogènes**.

Exemple :

● Résolution de l'équation différentielle : $y' = -4y$

Les solutions sont du type $f(x) = ke^{-4x}$ où k est une constante réelle. Par exemple, $f(x) = e^{-4x}$ ou $f(x) = 2e^{-4x}$ ou encore $f(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

● Déterminons la solution f de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$.

Cette équation peut s'écrire $y' = 3y$. Les solutions sont du type $f(x) = ke^{3x}$ où k est une constante réelle.

● Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 0$:

Cette équation peut s'écrire $y' = -\frac{5}{2}y$. Les solutions sont du type $f(x) = k\,e^{-\frac{5}{2}x}$ où k est une constante réelle.

b) Unicité de la solution sous condition initiale :

Théorème :

Soient x_0, y_0 et a des réels donnés, l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple 1 :

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$:

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où k est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de k convient pour que $f(0) = 1$:

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$,

D'où $f(x) = e^{-2x}$.

Exemple 2 :

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution f vérifie $f(2) = 4$:

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où k est une constante réelle.

➔ Solution particulière : on a $f(2) = 4 \Leftrightarrow ke^{-2\times 2} = 4 \Leftrightarrow k = 4e^4$,

D'où $f(x) = 4e^4e^{-2x}$ que l'on peut aussi écrire $f(x) = 4e^{-2x+4}$ ou encore $f(x) = 4e^{-2(x-2)}$ (on retrouve là la forme donnée dans le théorème).

2°) Équations différentielles du type $y' = ay + b$:

a) Solution particulière constante :

Théorème :

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. La fonction constante $y_0(x) = -\frac{b}{a}$ est une solution de (E).

Preuve :

$y_0'(x) = 0$ et $ay_0(x) + b = a\times\left(-\frac{b}{a}\right)+b = 0$.

b) Solution générale :

Vocabulaire :

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. L'équation $y' = ay$ (H) s'appelle équation homogène associée à (E).

Théorème (admis) **:**

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. On obtient les solutions de cette équation différentielle en ajoutant la solution générale de l'équation homogène qui lui est associée avec sa solution particulière constante. Les solutions de (E) sont donc les fonctions :

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction.

Exemple :

● Résolution de l'équation différentielle : $y' = -4y + 3$ (E) :

La solution générale de $y' = -4y$, équation homogène associée à (E), sont les fonctions $f(x) = ke^{-4x}$ où k est une constante réelle.

La solution particulière constante de (E) est $\frac{3}{4}$.

La solution générale de (E) sont donc les fonctions $f(x) = ke^{-4x} + \frac{3}{4}$.

Par exemple, $f(x) = e^{-4x} + \frac{3}{4}$ ou $f(x) = 2e^{-4x} + \frac{3}{4}$ ou encore $f(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{3}{4}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

c) Unicité de la solution sous condition initiale :

Théorème (admis) **:**

Soient x_0, y_0, a et b des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle $y' = -5y + 2$ telle que $f(0) = 1$:

Remarquons tout d'abord que cette équation s'écrit aussi $y' + 5y = 2$

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = k\,e^{-5x} + \frac{2}{5}$ où k est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de k convient pour que $f(0) = 1$:

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow k\,e^{-5\times 0} + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow k + \frac{2}{5} = 1$ soit $k = \frac{3}{5}$.

D'où $f(x) = \frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{2}{5}$.