PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I. Rappels :

Vous avez vu en première un chapitre « tableaux croisés et probabilités conditionnelles ». Vous devez savoir ce qu'est un tableau croisé, une fréquence, une fréquence marginale, une fréquence conditionnelle (en ligne ou en colonne),. Vous devez connaître les notations $A \cup B$, $A \cap B$, $A \subset B$ et l'égalité $f(A \cap B) = f(A) + f(B) - f(A \cup B)$.

II. Probabilités conditionnelles :

1°) Définition :

Définition :

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω. Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de B, sachant que A est réalisé est notée $\mathbf{P_A(B)}$. Elle correspond à la procédure consistant à choisir une fiche au hasard parmi les éléments de A, et à se demander alors quelle est la probabilité que l'élément choisi soit un élément de B.

On dit « **P de B sachant A** » et on peut utiliser la formule : $P_A(B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

P_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. $P_A(B)$ se lit P de B sachant A.

Remarque :

Comme $P_A(B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

La réalisation de $A \cap B$ s'obtient en réalisant A, puis B sachant que A est réalisé.

Exemple :

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Considérons les événements A : « la première boule est rouge » et B : « la deuxième boule est rouge ».

Tirer deux boules rouges correspond à l'événement $A \cap B$. Calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Or $P(A) = \dfrac{5}{8}$ (5 boules rouges parmi 8) et $P_A(B) = \dfrac{4}{7}$ (après le tirage de la première boule rouge, il reste 4 boules rouges parmi 7).

Ainsi, $P(A \cap B) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$.

2°) Arbre pondéré :

- Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
- Sur les branches du **deuxième niveau (et des suivants s'il y en a)**, on inscrit des **probabilités conditionnelles**.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 : c'est la « **loi des nœuds** ».
- On applique le **principe multiplicatif** des probabilités notées sur les branches décrivant un chemin: le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

- L'événement B se retrouve soit dans A, soit dans son contraire $\overline{A}$, donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ la probabilité de l'événement B écrit aux extrémités de plusieurs chemins d'un arbre pondéré est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à B : c'est la formule des **probabilités totales**.

Exemple :

Une urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne U_2 contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Appelons U_1 , U_2 et U_3 les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.

Soit B l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne

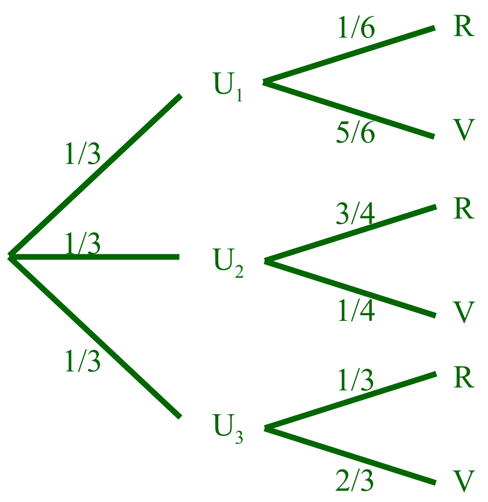
$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B)$,

Donc $P(B)=P(U_1)\times P_{U_1}(B)+P(U_2)\times P_{U_2}(B)+P(U_3)\times P_{U_3}(B)$.

Or $P_{U_1}(B)=\frac{1}{6}$; $P_{U_2}(B)=\frac{3}{4}$; $P_{U_3}(B)=\frac{1}{3}$.

On a donc $P(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

On peut retrouver ce résultat en utilisant un arbre de probabilités :



On applique les règles suivantes :

• On a une probabilité sur la première branche, puis des probabilités conditionnelles sur les branches suivantes.

• Tous les chemins partant d'un événement forment une partition de cette événement.

• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Ainsi une simple lecture de l'arbre nous donne le résultat $P(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

III. Indépendance :

Définition :

On dit que deux événements A et B, deux événements de probabilités non nulles, sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.

Propriété :

Cela équivaut à dire que si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Preuve :

$$P_A(B) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque :

Il est naturel de dire que A et B sont indépendants si la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A, autrement dit que la probabilité que B se réalise est la même que A se réalise ou non.

Exemple :

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Soient A l'événement « le premier moteur tombe en panne » et B l'événement « le second moteur tombe en panne ».

Alors $A \cap B$ est l'événement « les deux moteurs tombent en panne ».

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 10^{-8}$. L'événement contraire, $\overline{A} \overline{\cap} \overline{B}$, signifie qu'au moins l'un des moteurs n'est pas tombé en panne, donc que l'avion arrive à bon port.

On a $P(\overline{A} \overline{\cap} \overline{B}) = 1 - 10^{-8} = 0{,}999\,999\,99 = 99{,}999\,999\ \%$