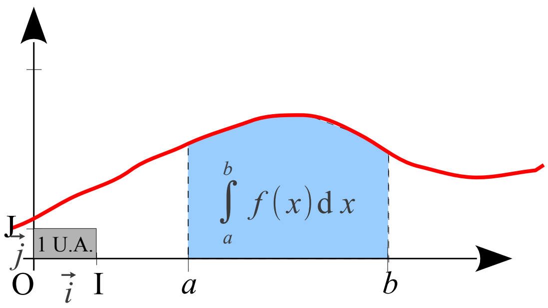
INTÉGRATION

I. Intégrale d'une fonction continue :



1°) Fonction continue positive :

Définition :

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire (U.A.), de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : « intégrale de a à b de $f(x)$ dx ».
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- La variable x est appelée variable "muette". On peut remplacer x par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du \;\dots$
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est 6 cm^2.

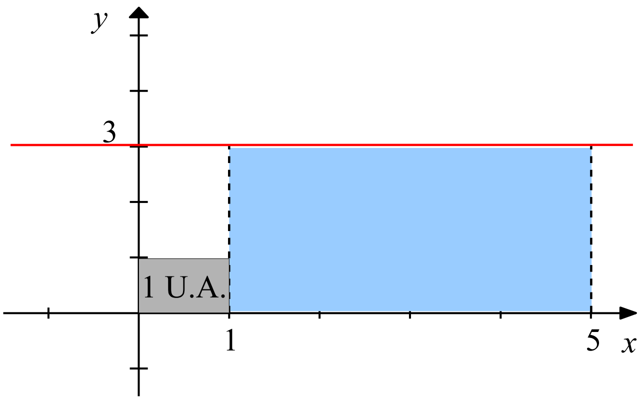
Exemple 1 :

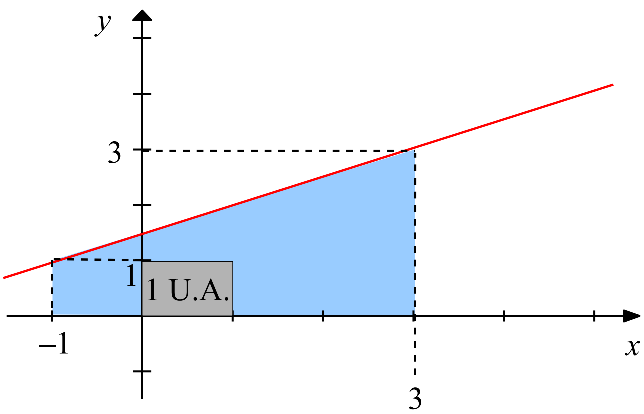
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$.

$\int_1^5 f(x)\,dx$ est l'aire d'un rectangle de côtés 4 et 3.

On a donc

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 3\,dx = 3(5-1) = 12 \text{ U.A.}.$$





Exemple 2 :

Calculons $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x+1,5\right)dx$. Il s'agit de calculer l'aire d'un trapèze de bases 1 et 3 et de hauteur 4 (3 – (–1)).

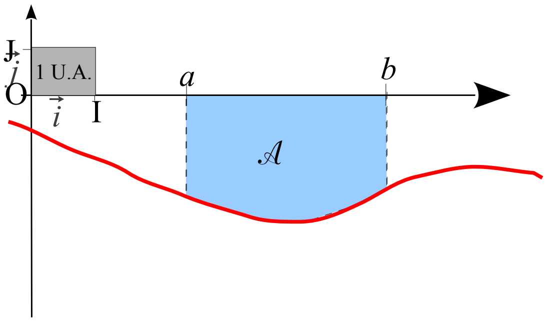
Nous obtenons donc $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x+1,5\right)dx = 4\times\frac{1+3}{2}$ = 8 cm^2.

2°) Fonction continue de signe quelconque :

Définition :

Soient f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'opposé du réel mesurant l'aire, en unités d'aire (U.A.), de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

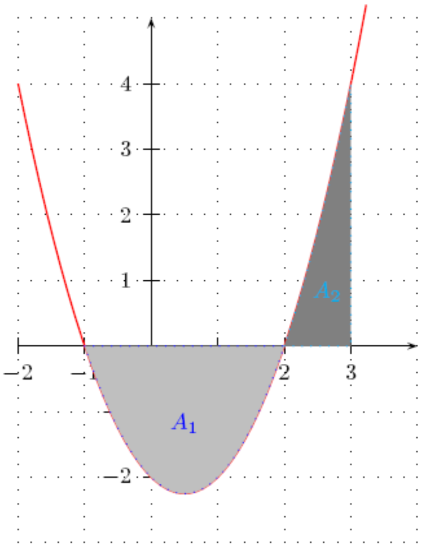


Exemple :

Sur le graphique ci-contre, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$.

Définition :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a\ ;\ b]$, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Exemple :

Sur le graphique ci-contre, $\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1$.

II. Intégrales et primitives :

1°) Primitive définie à l'aide d'une intégrale :

Théorème :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si a appartient à I, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I (pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$).

Remarque :

La fonction F définie ci-dessus est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Exemple :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t$ est dérivable, $F'(x) = x^2$. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$. De plus $F(1) = 0$ donc $\dfrac{1^3}{3} + c = 0$, soit $c = -\dfrac{1}{3}$.

On a donc $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$, soit $F(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$.

2°) Calculer une intégrale :

Propriété :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur I.}$$

Remarque :

$F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$, qui se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

On obtient donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples :

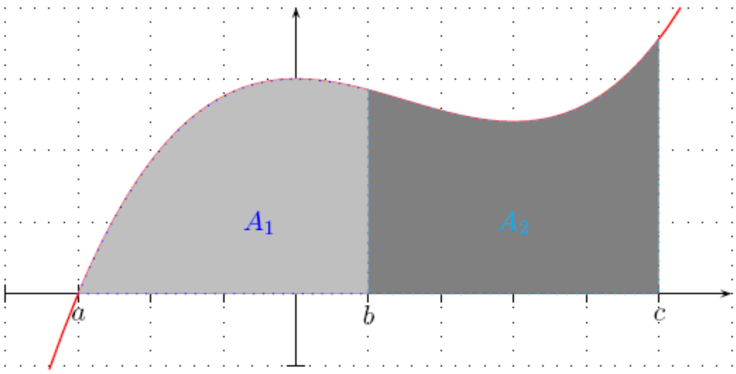
- $\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \frac{-2^3}{3}+4\times 2-\left(\frac{-(-2)^3}{3}+4\times(-2)\right) = \frac{32}{3}$ U.A..
- $\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_{\frac{1}{2}}^{4} = \ln 4 - \ln \frac{1}{2} = \ln 4 + \ln 2 = 3 \ln 2$ U.A..

III. Propriétés de l'intégrale :

1°) Relation de Chasles :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;c]$ et $b \in [a\,;c]$, alors $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.



Interprétation graphique :

Sur le graphique ci-contre,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2.$$

Conséquence :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ donc } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

2°) Linéarité :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe (de type polynôme par exemple) à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

Exemple :

Calcul de l'intégrale : $I = \int_{-2}^{2} (2+5x^3)\,dx$.

Aire d'un rectangle
de largeur 4 et de hauteur 2

$$I = \int_{-2}^{2} (2+5x^3)\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx + 5\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 4 \times 2 + 0 = 8 \text{ U.A.}$$

0 car la fonction cube est impaire

3°) Positivité :

Propriété :

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Remarque :

La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ sans avoir f positive sur $[a\,;b]$:

$\int_0^3 (2x-1)\,dx = [x^2-x]_0^3 = 6$. Donc, $\int_0^3 (2x-1)\,dx \geqslant 0$. Cependant, la fonction $x \longmapsto 2x-1$ n'est pas positive sur $[0\,;3]$.

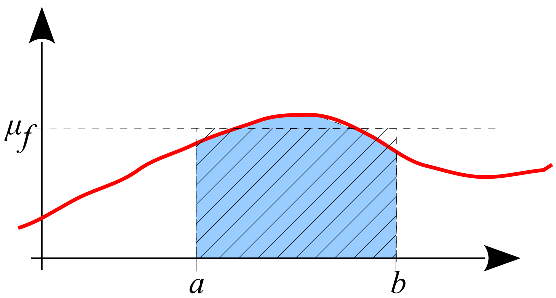
IV. Valeur moyenne d'une fonction :

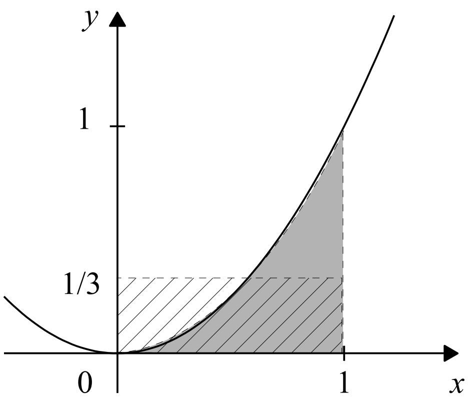
Définition :

Soit f une fonction continue. Si $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel μ_f défini par $\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation graphique :

La droite d'équation $y = \mu_f$ est la droite horizontale telle que l'aire des parties du plan délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part et les courbes d'équations $y = f(x)$ ( ) et $y = \mu_f$ ( ) soient de même valeur.





Exemple :

La valeur moyenne sur $[0\,;1]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{1}\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Les aires hachurée et grisée ci-contre sont donc égales.