LOI BINOMIALE

I. Variable aléatoire discrète :

1°) Définition, exemple :

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire (c'est à dire l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire).

Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque élément de Ω un nombre réel.

Exemple :

On lance deux fois une pièce équilibrée.

On considère Ω l'univers de cette expérience. $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$ On peut identifier l'univers à l'aide d'un arbre de probabilités.

Si à chaque issue de cette expérience, on associe le nombre de « face » obtenus, alors on définit une variable aléatoire X sur Ω, elle prend les valeurs 0, 1 et 2. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

Notation :

Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire.

On note $\{X = a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur a ».

On note $\{X \leqslant a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend une valeur inférieure ou égale a ».

2°) Loi de probabilité :

Définition :

Définir la loi de probabilité associée à une variable aléatoire revient à associer à chaque valeur prise par cette variable aléatoire la probabilité correspondante.

Valeurs prises par X	x_1	x_2	…	x_n	total
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	…	p_n	1

Exemple :

Retour avec la pièce.

$\Omega\ (X) = \{0 ; 1 ; 2\}$. La loi de probabilité associée est

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Propriété :

La somme des probabilités de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire est égale à 1.

Autrement dit, si on note $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$ les valeurs prises par X, on a

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \dots + P(X = x_n) = 1$$

Ou encore, plus simplement : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

3°) Espérance :

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

On suppose que X prend les valeurs x_1, x_2, ……, x_n avec les probabilités respectives p_1, p_2, … , p_n (comme dans la tableau ci-dessus).

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ est l'espérance mathématique de X.

Remarque :

L'espérance est la valeur moyenne de la variable aléatoire quand on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple :

Calculons l'espérance $E(X)$ de l'expérience avec la pièce.

Rappel de la loi de probabilité :

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Donc :

$E(X) = 0\times0{,}25 + 1\times0{,}5 + 2\times0{,}25 = 1$

Interprétation :

Ça signifie que, sur un grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire, le nombre moyen de face est de 1.

II. Schéma de Bernoulli :

1°) Épreuve de Bernoulli :

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli (ou expérience de Bernoulli) une expérience aléatoire qui comporte exactement deux issues :

- l'une est appelée succès, notée S.
- l'autre est appelée échec, notée E ou $\overline{S}$.

La probabilité p du succès est appelé le paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

Exemple :

Une question d'un QCM est composée de 4 réponses, dont une seule est correcte. On suppose qu'un élève répond totalement au hasard.

L'expérience aléatoire consistant à regarder la réponse de l'élève à la question n'est pas une épreuve de Bernoulli, car elle possède 4 issues.

En revanche, l'expérience aléatoire consistant à regarder si la réponse est juste est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès l'événement « répondre juste » et échec « répondre faux ».

Son paramètre est $p = \frac{1}{4}$.

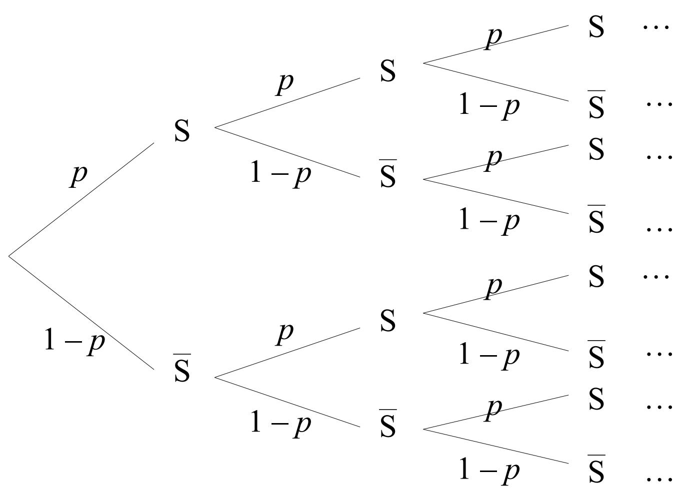
2°) Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (c'est-à-dire dans les mêmes conditions, les résultats des premières épreuves n'influant pas sur les résultats des suivantes). On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètre n (le nombre de répétitions) et p (la probabilité du succès).

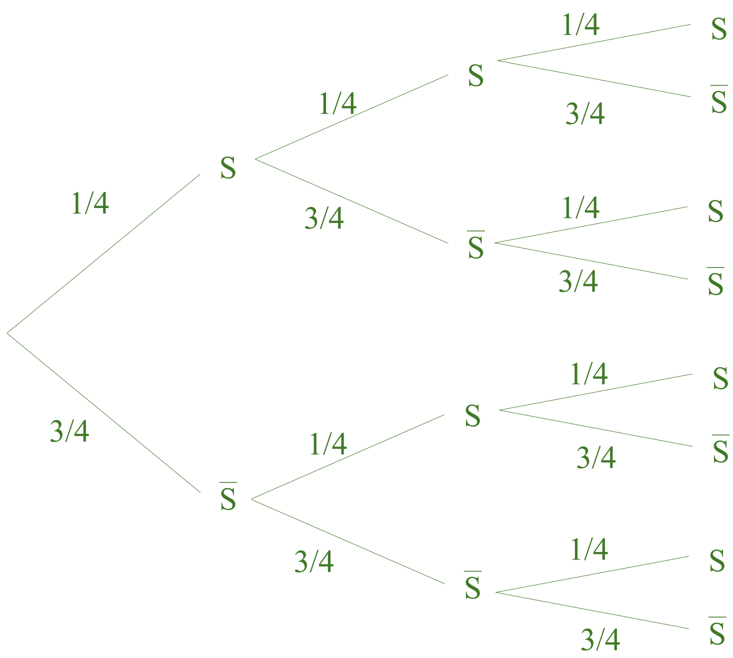
Remarque :

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une liste de n issues qui sont soit des succès, soit des échecs. Exemple : {S ; E ; S ; S ; ... ; S ; E ; E} .



Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : un exercice comporte 3 questions qui chacune comporte 4 réponses dont une seule est juste, et on suppose que le candidat répond au hasard. Pour chaque réponse, on s'intéresse a fait qu'elle soit juste ou non. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. On peut représenter les éventualités sur un arbre pondéré :



Issue	**Probabilité**
(S;S;S)	$(1/4)^3$
(S;S;$\overline{S}$)	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
(S;$\overline{S}$;S)	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
(S;$\overline{S}$;$\overline{S}$)	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
($\overline{S}$;S;S)	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
($\overline{S}$;S;$\overline{S}$)	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
($\overline{S}$;$\overline{S}$;S)	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
($\overline{S}$;$\overline{S}$;$\overline{S}$)	$(3/4)^3$

III. Loi binomiale :

1°) Loi binomiale :

Définition :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. La loi de probabilité de la variable X est appelée loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'exercice de QCM avec 3 questions comportant chacune 4 réponses possibles, une seule d'entre elles étant correcte. La variable aléatoire X qui correspond au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}25$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}(3 ; 0{,}25)$). Le nombre de bonnes réponses varie de 0 à 3 donc $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$. On obtient la loi de probabilité suivante :

Valeur de X (x_i)	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Remarque :

$P(X = 1) = \mathrm{P}(\{(\mathrm{S} ; \overline{\mathrm{S}} ; \overline{\mathrm{S}}) ; (\overline{\mathrm{S}} ; \mathrm{S} ; \overline{\mathrm{S}}) ; (\overline{\mathrm{S}} ; \overline{\mathrm{S}} ; \mathrm{S})\})$. Nous remarquons que chacun des événements élémentaires qui composent cet événement a la même probabilité : $\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (1 succès, 2 échecs). Pour calculer $P(X = 1)$, il suffit donc de multiplier cette probabilité par le nombre de branches de l'arbre de probabilité menant à exactement 1 succès.

2°) Probabilité :

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n ; p)$.

Pour tout entier k appartenant à $[0 ; n]$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Preuve :

Sur n épreuves, si on a k succès, cela signifie que l'on a $n - k$ échecs. La probabilité d'avoir k succès suivis de $n - k$ échecs est de $p^k \times (1-p)^{n-k}$. Chaque issue comportant k succès et $n - k$ échecs à la même probabilité, quel que soit l'ordre dans lequel apparaissent ces succès et ces échecs (il s'agit d'une branche de l'arbre dans laquelle apparaît k fois la probabilité p et $n - k$ fois la probabilité $1 - p$).

Il ne reste donc plus qu'à déterminer le nombre de branches de l'arbre correspondant à la situation. Ce nombre correspond au nombre de façon de positionner les k succès parmi les n expériences. Placer ces k succès revient à choisir leurs rangs. Cela revient donc à choisir k nombres parmi n les entiers de $[1 ; n]$, ce nombre est noté $\binom{n}{k}$ et se lit k parmi n.

Exemple :

La probabilité qu'un candidat qui répond totalement au hasard à l'exercice de QCM (3 questions avec 4 réponses dont une seule bonne) obtienne exactement 2 bonnes réponses est de

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\times 0{,}25^2\times 0{,}75 \approx 14\ \%.$$

Remarque :

Les fonctions avancées de la calculatrice permettent de calculer ces probabilités :

• pour calculer $P(X = k)$, on utilise binomFdp qui se trouve dans le menu distrib : 2nde var (distrib)

• pour calculer $P\ (X \leqslant k)$, on utilise binomFRép qui se trouve dans le même menu.

2°) Espérance :

Exemple :

Reprenons la loi de probabilité de notre exemple $\mathscr{B}\ (3\ ;\ 0{,}25)$:

Valeur de X (x_i)	0	1	2	3
$P\ (X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc de

$$E\ (X) = 0\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+1\times3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}75.$$

On remarque que $E\ (X) = 3 \times 0{,}25 = np$. Cette constatation peut être généralisée :

Propriété (admise) :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\ (n\ ;\ p)$. Alors l'espérance est $E\ (X) = np$.

III. Propriétés des coefficients binomiaux :

1°) Valeurs évidentes :

● Par convention $\binom{0}{0} = 1$.

● Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

● Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

2°) Propriétés :

Propriété :

Symétrie des coefficients binomiaux :

pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

Preuve :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins où il y a k succès parmi n épreuves. Il y en a donc autant que de façon de placer ces k éléments parmi n emplacements, les emplacements laissés vides seront complétés par des échecs.

$\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins où il y a $n - k$ succès parmi n épreuves. On peut es placer parmi les n épreuve en commençant par placer les k échecs, puis en complétant les emplacements laissés vides seront complétés par des succès.

Propriété :

Relation de Pascal : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Preuve :

Raisonnons sur le nombre de succès lors de n répétition, et ajoutons une répétition : pour obtenir $k + 1$ succès parmi $n + 1$ répétitions, il y a deux possibilités :

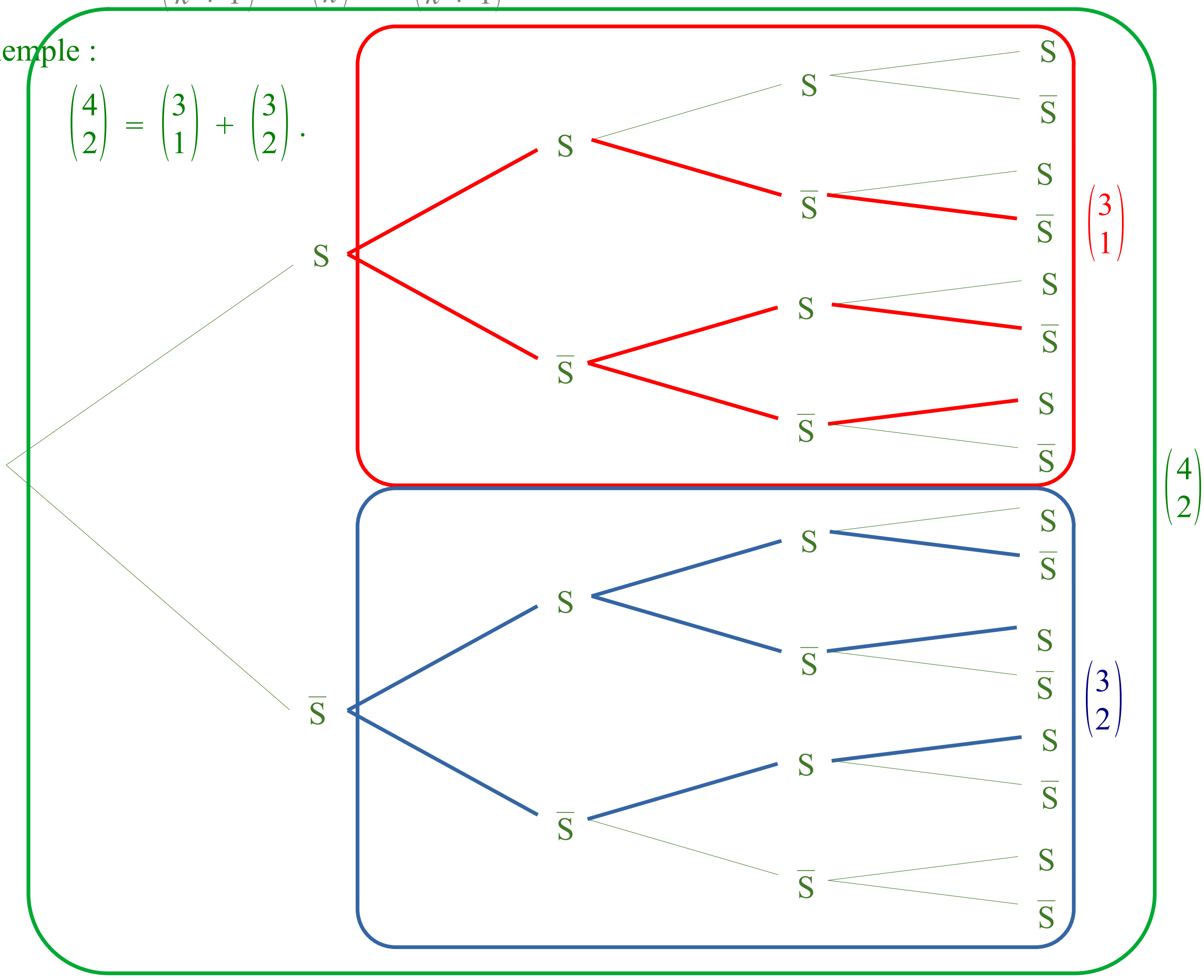
- soit on avait $k + 1$ succès parmi les n premières répétitions, et lors de la $(n + 1)$ème répétition il faut un échec. Cela représente donc $\binom{n}{k+1}$ cas ;

- soit on avait k succès parmi les n premières répétitions et lors de la $(n + 1)$ème répétition il faut un succès. Cela représente donc $\binom{n}{k}$ cas ;

Donc $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Exemple :

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$.



3°) Le triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal permet d'illustrer quelques propriétés vues ci-dessus :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5 +	10	10	5	1			
6	1	6	= 15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…	1								1

À l'intersection de la ligne « n » et de la colonne « k », on lit $\binom{n}{k}$

Les valeurs évidentes $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

La relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ permet de compléter les autres cases.

Mise en évidence de la symétrie des coefficients.